# RIESZ空間の新正則性条件と非加法的測度論への応用 : ALEXANDROFF定理 (非加法性の数理と情報 : 凸解析との接点)



河邊, 淳

数理解析研究所講究録
第 1683 巻 2010 年 54-61



# RIESZ 空間の新正則性条件と非加法的測度論への応用: ALEXANDROFF 定理

信州大学・工学部　河邊　淳 * (Jun Kawabe)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. 測度の連続性に関する Alexandroff 定理は, Riesz 空間に値をとるコンパクトな非加法的測度に対して, Riesz 空間が弱漸近的 Egoroff 性をもち, 測度が自己連続の場合と, Riesz 空間は弱 $\sigma$-分配的でしかないが, 測度が一様自己連続な場合に成り立つ.

## 1. 序論

A.D. Alexandroff は, コンパクト Hausdorff 空間上の正則な有限加法的測度は常に可算加法的であることを示した [1]. この結果は, Riečan [18] と Hrachovina [5] により, コンパクトな Riesz 空間値有限加法的測度の場合へ, さらに Volauf [21] により, コンパクトな束群値有限加法的測度の場合へと順次拡張された. 一方, Wu-Ha [24, Theorem 3.2] は, 完備可分距離空間上の一様自己連続な非加法的 Radon 測度は常に連続となるという形で Alexandroff 定理を定式化し, 非加法的測度論の枠組みで議論した (残念ながら, [24, Theorem 2.1] の証明は誤りを含んでいる. 詳しくは [25] を見よ). この論文の目的は, Alexandroff 定理を Riesz 空間値非加法的測度に対して定式化することにある.

測度論のならず解析学一般で有用な $\varepsilon$-論法は, 一般の Riesz 空間では機能しない. 最近, $\varepsilon$-論法の代用品として, 弱 $\sigma$-分配性, Egoroff 性, 漸近的 Egoroff 性, 多重 Egoroff 性などの滑らかさの条件を Riesz 空間に課すことにより, 加法的あるいは非加法的測度論における基本的かつ重要ないくつかの定理が, Riesz 空間の枠組みに拡張可能であることがわかってきた (例えば, [6, 7, 8, 9, 10], Riečan-Neubrunn [19], Wright [23] と, それら論文中の参考文献を見よ).

この論文では, Alexandorff 定理が, Riesz 空間に値をとるコンパクトな非加法的測度に対して, Riesz 空間が弱漸近的 Egoroff 性をもち, 測度が自己連続な場合と,

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28B15; Secondary 28C15, 28E10, 46A40.
*Key words and phrases.* non-additive measure, Alexandroff theorem, weak asymptotic Egoroff property, multiple Egoroff property, compact system, compact measure, Radon.
*Research supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540163, Japan Society for the Promotion of Sciences (JSPS).

Riesz 空間は弱 $\sigma$-分配的でしかないが，測度が一様自己連続な場合に定式化できることを報告する．この結果は第3章にまとめられている．第2章では，Riesz 空間の滑らかさの条件と Riesz 空間値非加法的測度に関する必要最小限の定義と性質を復習する．第4章では，Riesz 空間に多重 Egoroff 性を仮定すれば，完備または局所コンパクトな可分距離空間上の連続かつ弱零加法的な非加法的 Borel 測度は自動的に Radon となることを報告する．さらに，非加法的測度の Radon 性と連続性の間の密接な関係についても述べる．

この論文は既に公表された論文 [10] の要約であり，証明などは原論分を参照していただきたい．

## 2. 準備

この論文を通じて，$V$ は Riesz 空間とする．Riesz 空間論に関する標準的な用語や結果については [13] を見よ．また，自然数全体を $\mathbb{N}$，実数全体を $\mathbb{R}$ で表す．

2.1. Riesz 空間の正則性条件. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像全体を $\Theta$ で表す．$\Theta$ は各点毎の順序，すなわち，$\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ に対して，$\theta_1(i) \le \theta_2(i)$ $(\forall i \in \mathbb{N})$ で定まる順序関係 $\theta_1 \le \theta_2$ に関して，上に有向な半順序集合となる．順序有界な2重列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \subset V$ は，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $r_{i,j} \downarrow 0$，すなわち，各 $i, j \in \mathbb{N}$ に対して，$r_{i,j} \ge r_{i,j+1}$ かつ各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\inf_{j\in\mathbb{N}} r_{i,j} = 0$ のとき，$V$ の**制御列** (regulator) という．Riesz 空間 $V$ は，その任意の制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ に対して，$V$ の単調減少列 $p_k \downarrow 0$ が存在して，各 $(k, i) \in \mathbb{N}^2$ に対して，$j(k, i) \in \mathbb{N}$ を選べば，$r_{i,j(k,i)} \le p_k$ となるとき，**Egoroff 性**をもつという [13, Chapter 10]．Dedekind $\sigma$-完備な Riesz 空間 $V$ は，任意の $V$ の制御列 $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ に対して $\inf_{\theta\in\Theta} \sup_{i\in\mathbb{N}} r_{i,\theta(i)} = 0$ のとき，**弱 $\sigma$-分配的** (weakly $\sigma$-distributive) という [23]．

測度論で有用な $\varepsilon$-論法は，一般の Riesz 空間では機能しない．それゆえ，Riesz 空間の枠組みで測度論を展開するには，$\varepsilon$-論法の代用品として，何らかの正則性，すなわち滑らかさの条件を Riesz 空間に課す必要がある．Wright [23] は，Riesz 空間の弱 $\sigma$-分配性と Fremlin の補題 [4] を組み合わせた巧みな技法や，Riesz 空間の表現定理として有名な Maeda-Ogasawara-Vulikh 定理を活用して，Riesz 空間値測度論を展開することに成功した．しかし，彼の理論は可算 (劣) 加法的な測度に対しては有効に機能するが，必ずしも加法的ではない非加法的測度を研究する際には，いまだ力不足であることがわかってきた．以下に挙げる正則性条件は，Riesz 空間値非加法的測度論を展開するために，筆者の一連の研究で新たに導入された [7, 9]．

**定義 1.** $u \in V^+$ とする．各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$u^{(m)} := \{u_{n_1,\dots,n_m}\}_{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m}$ は $V$ の要素からなる多重列とする．

(1) 多重列の列 $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は，各 $m \in \mathbb{N}$ と各 $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して

(i) $0 \leq u_{n_1} \leq u_{n_1,n_2} \leq \cdots \leq u_{n_1,\ldots,n_m} \leq u$

(ii) $n \to \infty$ とすると，$u_n \downarrow 0, u_{n_1,n} \downarrow u_{n_1}, \cdots, u_{n_1,\ldots,n_m,n} \downarrow u_{n_1,\ldots,n_m}$

を満たすとき，$V$ の **$u$-多重制御列** ($u$-multiple regulator) という.

(2) $u$-多重制御列 $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は，各 $m \in \mathbb{N}$ と各 $(n_1,\ldots,n_m) \in \mathbb{N}^m$, $(n'_1,\ldots,n'_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して，$n_i \leq n'_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ ならば $u_{n_1,\ldots,n_m} \geq u_{n'_1,\ldots,n'_m}$ のとき，**厳密** (strict) という.

**定義 2.** 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$u^{(m)} := \{u_{n_1,\ldots,n_m}\}_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m}$ は $V$ の要素からなる多重列とする.

(1) 任意の $u \in V^+$ と $V$ の任意の厳密な $u$-多重制御列 $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して

(i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して，上限 $u_\theta := \sup_{m\in\mathbb{N}} u_{\theta(1),\ldots,\theta(m)}$ が存在

(ii) 点列 $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Theta$ が存在して，$u_{\theta_k} \to 0$

が成り立つとき，$V$ は **多重 Egoroff 性** (multiple Egoroff property) をもつという.

(2) 任意の $u \in V^+$ と $V$ の任意の $u$-多重制御列 $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して

(i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して，上限 $u_\theta := \sup_{m\in\mathbb{N}} u_{\theta(1),\ldots,\theta(m)}$ が存在

(ii) $\inf_{\theta\in\Theta} u_\theta = 0$

が成り立つとき，$V$ は **漸近的 Egoroff 性** (asymptotic Egoroff property) をもつという.

(3) 任意の $u \in V^+$ と $V$ の任意の厳密な $u$-多重制御列 $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して

(i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して，上限 $u_\theta := \sup_{m\in\mathbb{N}} u_{\theta(1),\ldots,\theta(m)}$ が存在

(ii) $\inf_{\theta\in\Theta} u_\theta = 0$

が成り立つとき，$V$ は **弱漸近的 Egoroff 性** (weakly asymptotic Egoroff property) をもつという.

多くの重要な関数空間や数列空間は，これら Riesz 空間の正則性をもつ [7, 9].

2.2. Riesz 空間値非加法的測度. 以下では，$(X,\mathcal{F})$ は可測空間，すなわち，空でない集合 $X$ の部分集合からなる $\sigma$-集合体を $\mathcal{F}$ とする.

**定義 3.** 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき，**非加法的測度** (non-additive measure) という.

**定義 4.** 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする.

(1) 任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$A_n \downarrow A$ ならば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ のとき，$\mu$ は **上から連続** (continuous from above) という.

(2) 任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ のとき，$\mu$ は**下から連続** (continuous from below) という．

(3) 上からおよび下から連続なとき，$\mu$ は**連続** (continuous) という．

(4) 空集合で上から連続なとき，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$A_n \downarrow \emptyset$ ならば $\mu(A_n) \downarrow 0$ のとき，$\mu$ は**順序連続** (order continuous) という．

(5) 測度が 0 の集合で上から連続なとき，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$A_n \downarrow A$ かつ $\mu(A) = 0$ ならば $\mu(A_n) \downarrow 0$ のとき，$\mu$ は**強順序連続** (strongly order continuous) という．

(6) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ のとき，$\mu$ は**劣加法的** (subadditive) という．

(7) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ のとき，$\mu$ は**零加法的** (null-additive) という．

(8) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(A) = \mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = 0$ のとき，$\mu$ は**弱零加法的** (weakly null-additive) という．

(9) 任意の $A \in \mathcal{F}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ のとき，$\mu$ は**上から自己連続** (autocontinuous from above) という．

(10) 任意の $A \in \mathcal{F}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \backslash B_n) \to \mu(A)$ のとき，$\mu$ は**下から自己連続** (autocontinuous from below) という．

(11) 上からおよび下から自己連続なとき，$\mu$ は**自己連続** (autocontinuous) という．

(12) 任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば，$V$ の単調減少列 $p_n \downarrow 0$ が存在して，すべての $A \in \mathcal{F}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(A \cup B_n) \leq \mu(A) + p_n$ のとき，$\mu$ は**上から一様自己連続** (uniformly autocontinuous from above) という．

(13) 任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば，$V$ の単調減少列 $p_n \downarrow 0$ が存在して，すべての $A \in \mathcal{F}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(A) \leq \mu(A \setminus B_n) + p_n$ のとき，$\mu$ は**下から一様自己連続** (uniformly autocontinuous from below) という．

(14) 上からおよび下から一様自己連続のとき，$\mu$ は**一様自己連続** (uniformly autocontinuous) という．

非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ が**順序可算加法的** (order countably additive)，すなわち，互いに素な集合からなる任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ のとき，定義 4 の (1)–(14) の条件はすべて自動的に満たされる．

次の命題は定義 4 から容易に導ける．その証明も実数値非加法的測度の場合と同じである．実数値非加法的測度についてのより詳細な情報は [2, 15, 22] を見よ．

**命題 1.** $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする．

(1) 以下の関係が成り立つ: 劣加法的 $\Rightarrow$ 一様自己連続 $\Rightarrow$ 自己連続 $\Rightarrow$ 零加法的 $\Rightarrow$ 弱零加法的.

(2) $\inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}, A \neq \emptyset\} > 0$ ならば $\mu$ は自己連続である.

(3) $\mu$ は順序連続かつ上から自己連続ならば，上から連続である．また，$\mu$ は順序連続かつ下から自己連続ならば，下から連続である.

(4) 以下の関係が成り立つ: 上から連続 $\Rightarrow$ 強順序連続 $\Rightarrow$ 順序連続．さらに，零加法的かつ順序連続 $\Rightarrow$ 強順序連続.

## 3. Alexandroff 定理

この章では，Alexandroff 定理 [1, Theorem 5, Chapter 3, §9] を Riesz 空間値非加法的測度論の枠組みで論じる.

**定義 5.** $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする.

(1) $X$ の部分集合からなる空でない集合族 $\mathcal{K}$ は，任意の集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ に対して，$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ ならば $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\bigcap_{n=1}^{n_0} K_n = \emptyset$ のとき，**コンパクト系** (compact system) [14] という.

(2) コンパクト系 $\mathcal{K}$ が存在して，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_n \subset K_n \subset A$ を満たし，$\mu(A \setminus B_n) \to 0$ のとき，$\mu$ は**コンパクト** (compact) という.

**注意 1.** (1) Hausdorff 空間のコンパクト集合全体からなる集合族はコンパクト系.

(2) コンパクト系に属する集合の有限和全体からなる集合族はコンパクト系 [17, Lemma 1.4]．それゆえ，定義 5 の (2) において，集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はともに単調増加，コンパクト系 $\mathcal{K}$ は有限和に関して閉じているとしてよい.

(3) 測度のコンパクト性に関するわれわれの定義は，[5, Definition 1] よりも強い．実際，$V$ が Dedekind $\sigma$-完備かつ弱 $\sigma$-分配的な順序可分 Riesz 空間の場合には，両者は一致する.

Riesz 空間が弱漸近的 Egoroff 性をもつ場合には，コンパクトな Riesz 空間値非加法的測度に対して，Alexandroff 定理を次のように定式化することができる.

**定理 1.** $V$ は弱漸近的 Egoroff 性をもつとする．コンパクトかつ自己連続な非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は常に連続である.

Riesz 空間が弱 $\sigma$-分配性しかもたない場合でも，コンパクトな Riesz 空間値非加法的測度に，自己連続性よりも強い一様自己連続性を仮定すれば，Alexandroff 定理を定式化することができる.

**定理 2** (cf. [5, 18]). $V$ は Dedekind $\sigma$-完備かつ弱 $\sigma$-分配的とする．コンパクトかつ一様自己連続な非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は常に連続である.

## 4. Radon 非加法的測度

この章では，Radon 非加法的測度の基本的性質と，測度の Radon 性と連続性の間の密接な関係について述べる．以下では，$S$ は Hausdorff 空間とし，$\mathcal{B}(S)$ で $S$ の Borel 集合からなる $\sigma$-集合体，すなわち，$S$ の開集合全体によって生成される $\sigma$-集合体を表す．$\mathcal{B}(S)$ 上で定義された非加法的測度を，$S$ 上の **非加法的 Borel 測度** (Borel non-additive measure) という．

**定義 6.** $\mu$ は $S$ 上の $V$-値非加法的 Borel 測度とする．

(1) 任意の $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して，閉集合列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と開集合列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n \subset A \subset G_n$ を満たし，$\mu(G_n \setminus F_n) \to 0$ のとき，$\mu$ は **正則** (regular) という．

(2) 任意の $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して，コンパクト集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と開集合列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $K_n \subset A \subset G_n$ を満たし，$\mu(G_n \setminus K_n) \to 0$ のとき，$\mu$ は **Radon** という．

(3) コンパクト集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\mu(S - K_n) \to 0$ のとき，$\mu$ は **緊密** (tight) という．

**注意 2.** 上の定義において，$\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少，$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加としてよい．

**命題 2.** $\mu$ は $S$ 上の $V$-値非加法的 Borel 測度で，弱零加法的かつ強順序連続とする．次の 2 つの条件は同値．

(i) $\mu$ は Radon.

(ii) $\mu$ は正則かつ緊密．

**注意 3.** 命題 2 は，任意の単調減少な集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対して，$\mu(A_n) \to 0$ かつ $\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A_n \cup B_n) \to 0$ となる $V$-値非加法的 Borel 測度に対しても成り立つ．この $\mu$ に関する条件は，[3] で導入された **擬距離生成条件** (pseudometric generating property) より少しだけ弱い条件である．

Hausdorff 空間のコンパクト集合全体からなる集合族はコンパクト系なので，非加法的測度のコンパクト性は，その Radon 性から導かれる．よって，定理 1 と定理 2 より，次の結果が得られる．

**定理 3.** (1) $V$ は弱漸近的 Egoroff 性をもつとする．$S$ 上の自己連続な $V$-値非加法的 Radon 測度は常に連続である．

(2) $V$ は Dedekind $\sigma$-完備かつ弱 $\sigma$-分配的とする．$S$ 上の一様自己連続な $V$-値非加法的 Radon 測度は常に連続である．

最近の論文 [11, Theorem 1] で Li と Yasuda は，距離空間上の連続かつ弱零加法的な実数値非加法的 Borel 測度は常に正則であることを示した．次の定理は，この結果の Riesz 空間値非加法的測度への拡張となっている [9, Theorem 2].

**定理 4.** $S$ は距離空間とする．$V$ は多重 Egoroff 性をもつとする．$S$ 上の連続かつ弱零加法的な非加法的 Borel 測度は常に正則である．

完備あるいは局所コンパクトな可分距離空間上の実数値有界測度は常に Radon となることはよく知られている ([16, Theorem 3.2] と [20, Theorems 6 and 9, Chapter II, Part I] を見よ)．この結果は，[12, Theorem 1 and Lemma 2] では，完備可分距離空間上の連続かつ零加法的な実数値非加法的 Borel 測度は常に緊密，それゆえ Radon という形で，非加法的測度論の枠組みで定式化された ([24, Theorem 2.3] も見よ)．次の 2 つの結果は，これら従前の結果をすべて含んでいる ([6, Theorem 12] も見よ)．

**定理 5.** $S$ は完備可分距離空間とする．$V$ は多重 Egoroff 性をもつとする．$S$ 上の連続かつ弱零加法的な $V$-値非加法的 Borel 測度は常に緊密，それゆえ Radon である．

**定理 6.** $S$ は局所コンパクトな可分距離空間とする．$V$ は多重 Egoroff 性をもつとする．$S$ 上の連続かつ弱零加法的な $V$-値非加法的 Borel 測度は常に Radon である．

上の 2 つの定理の証明には，[12, Lemma 1] を Riesz 空間の枠組みで定式化した次の補題が必要となる．その証明では，[9, Lemma 1] の場合と同様に，Riesz 空間の多重 Egoroff 性が本質的な役割を果たしている．

**補題 1.** $(X, \mathcal{F})$ は可測空間，$\mu : \mathcal{F} \to V$ は連続な非加法的測度とする．$V$ は多重 Egoroff 性をもつとする．2 重集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathcal{F}$ は，各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A_{m,n} \downarrow \emptyset$ を満たすとする．このとき，写像列 $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Theta$ が存在して

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta_k(m)}\right) \to 0$$

となる．さらに，$\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は単調増加となるように選べる．

最後に，非加法的 Borel 測度の Radon 性と連続性の間の密接な関係について述べる．次の定理は [24, Theorems 2.3 and 3.2] を含んでいる．

**定理 7.** 可分距離空間 $S$ は完備または局所コンパクトとする．$\mu$ は $S$ 上の自己連続な $V$-値非加法的 Borel 測度とする．$V$ は多重 Egoroff 性をもつとする．次の 2 つの条件は同値．

(i) $\mu$ は Radon.

(ii) $\mu$ は連続.

## 参考文献


[1] A.D. Alexandroff, Additive set-functions in abstract spaces, Mat. Sbornik U.S. 9 (51) (1941) 563–628.
[2] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
[3] I. Dobrakov, J. Farková, On submeasures II, Math. Slovaca 30 (1980) 65–81.
[4] D.H. Fremlin, A direct proof of the Matthes-Wright integral extension theorem, J. London Math. Soc. (2) 11 (1975) 276–284.
[5] E. Hrachovina, A generalization of the Kolmogorov consistency theorem for vector measures, Acta Math. Univ. Comenian. 54-55 (1988) 141–145.
[6] J. Kawabe, Uniformity for weak order convergence of Riesz space-valued measures, Bull. Austral. Math. Soc. 71 (2005) 265–274.
[7] J. Kawabe, The Egoroff theorem for non-additive measures in Riesz spaces, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 2762–2770.
[8] J. Kawabe, The Egoroff property and the Egoroff theorem in Riesz space-valued non-additive measure theory, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 50–57.
[9] J. Kawabe, Regularity and Lusin's theorem for Riesz space-valued fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 895–903.
[10] J. Kawabe, The Alexandroff theorem for Riesz space-valued non-additive measures, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 2413–2421.
[11] J. Li, M. Yasuda, Lusin's theorem on fuzzy measure spaces, Fuzzy Sets and Systems 146 (2004) 121–133.
[12] J. Li, M. Yasuda, J. Song, Regularity properties of null-additive fuzzy measure on metric spaces, in: V. Torra, Y. Narukawa and S. Miyamoto, (Ed.), Lecture Notes in Artificial Intelligence 3558, Springer, Berlin, 2005, 59–66.
[13] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam, 1971.
[14] E. Marczewski, On compact measures, Fund. Math. 40 (1953) 113–124.
[15] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
[16] K.R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.
[17] J. Pfanzagl, W. Pierlo, Compact Systems of Sets, Lecture Notes in Math. 16, Springer, New York, 1966.
[18] J. Riečan, On the Kolmogorov consistency theorem for Riesz space valued measures, Acta Math. Univ. Comenian. 48-49 (1986) 173–180.
[19] B. Riečan, T. Neubrunn, Integral, Measure, and Ordering, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1997.
[20] L. Schwartz, Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures, Oxford University Press, 1973.
[21] P. Volauf, Alexandrov and Kolmogorov consistency theorem for measures with values in partially ordered groups, Tatra Mt. Math. Publ. 3 (1993) 237–244.
[22] Z. Wang, G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.
[23] J.D.M. Wright, The measure extension problem for vector lattices, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (1971) 65–85.
[24] C. Wu, M. Ha, On the regularity of the fuzzy measure on metric fuzzy measure spaces, Fuzzy Sets and Systems 66 (1994) 373–379.
[25] J. Wu, C. Wu, Fuzzy regular measures on topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 119 (2001) 529–533.



Department of Mathematics
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, Japan
*E-mail address*: jkawabe@shinshu-u.ac.jp